Elementi di Analisi Matematica e Ricerca Operativa – prova del 15 febbraio 2016

1) Discutere il seguente problema di Programmazione Lineare:
Trovare il massimo di $p(x_1,x_2,x_3,x_4) = 4x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4$ con i vincoli $x_k \geq 0\ (1 \leq k \leq 4)$ e

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 12 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ -x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 \leq 2 \end{cases}$$

(può essere utile notare che, posto $A_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, risulta $A_1 = A_3 + A_4 - 2A_5$, $A_2 = 2A_3 - A_4 + A_5$ e $B = 3A_3 + 2A_4 + A_5$).

Svolgimento. Siccome la terza relazione è in forma di disuguaglianza, introduciamo la variabile "di scarto" $x_5 \geq 0$ e riscriviamo il sistema nella forma

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 12 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ -x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 2 \end{cases} \qquad \text{cioè} \qquad \sum_{j=1}^{5} x_j A_j = B$$

dove gli A_j sono le colonne della matrice dei coefficienti e B la colonna dei termini noti.

Seguendo l'indicazione fornita scegliamo come base di $\mathcal{A}^* = \mathbb{R}^3$, l'insieme $\mathcal{B}_1 = \{A_3, A_4, A_5\}$.
Si costruisce allora la prima tabella del simplesso come segue:

		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	B
$x_{v_1} = x_3$	$c_{v_1} = c_3 = 1$	1	2	1	0	0	3
$x_{v_2} = x_4$	$c_{v_2} = c_4 = 8$	1	-1	0	1	0	2
$x_{v_3} = x_5$	$c_{v_3} = c_5 = 0$	-2	1	0	0	1	1
		5	-5	0	0	0	19
		$(z_1 - c_1)$	$(z_2 - c_2)$	$(z_3 - c_3)$	$(z_4 - c_4)$	$(z_5 - c_5)$	(z)

Siccome $z_2 - c_2 < 0$ e almeno uno degli $\alpha_{\ell,2}$ è positivo, bisogna operare la "trasformazione pivotale" facendo entrare nella base il vettore A_2 al posto di uno di quelli presenti. Il criterio di uscita impone di calcolare

$$\frac{\beta_1}{\alpha_{1,2}} = \frac{3}{2} \qquad \text{e} \qquad \frac{\beta_3}{\alpha_{3,2}} = 1 .$$

Siccome il minore dei due è $\dfrac{\beta_3}{\alpha_{3,2}} = 1$, esce il vettore $A_{v_3} = A_5$. La trasformazione pivotale avviene operando sulle righe della matrice della tabella in modo che le colonne della base canonica figurino, nell'ordine, in corrispondenza di A_3, A_4, A_2. Con semplici calcoli si ottiene la nuova tabella del simplesso relativa alla base $\mathcal{B}_2 = \{A_3, A_4, A_2\}$:

		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	B
$x_{v_1} = x_3$	$c_{v_1} = c_3 = 1$	5	0	1	0	-2	1
$x_{v_2} = x_4$	$c_{v_2} = c_4 = 8$	-1	0	0	1	1	3
$x_{v_3} = x_2$	$c_{v_3} = c_2 = -1$	-2	1	0	0	1	1
		-5	0	0	0	5	24
		$(z_1 - c_1)$	$(z_2 - c_2)$	$(z_3 - c_3)$	$(z_4 - c_4)$	$(z_5 - c_5)$	(z)

Siccome $z_1 - c_1 < 0$ e almeno uno degli $\alpha_{\ell,1}$ è positivo, bisogna operare la "trasformazione pivotale" facendo entrare nella base il vettore A_1 al posto di uno di quelli presenti. Siccome il solo $\alpha_{\ell,1}$ con valore positivo è $\alpha_{1,1} = 5$, esce il vettore $A_{v_1} = A_3$. La trasformazione pivotale avviene operando sulle righe della matrice della tabella in modo che le colonne della base canonica figurino, nell'ordine, in corrispondenza di A_1, A_4, A_2. Con semplici calcoli si ottiene la nuova tabella del simplesso relativa alla base $\mathcal{B}_3 = \{A_1, A_4, A_2\}$:

		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	B
$x_{v_1} = x_1$	$c_{v_1} = c_1 = 4$	1	0	$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$
$x_{v_2} = x_4$	$c_{v_2} = c_4 = 8$	0	0	$\frac{1}{5}$	1	$\frac{3}{5}$	$\frac{16}{5}$
$x_{v_3} = x_2$	$c_{v_3} = c_2 = -1$	0	1	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{5}$
		0	0	1	0	3	25
		$(z_1 - c_1)$	$(z_2 - c_2)$	$(z_3 - c_3)$	$(z_4 - c_4)$	$(z_5 - c_5)$	(z)

Siccome adesso tutti gli $z_j - c_j$ sono ≥ 0, l'algoritmo è terminato; la funzione obiettivo ha massimo nella regione ammissibile, il massimo vale $z = 25$ ed è assunto per $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \left(\frac{1}{5}, \frac{7}{5}, 0, \frac{16}{5}, 0\right)$.

2) Sia $f(x) = x^4 - x^3 + |x|^3$.
a) Dimostrare che f è adatta per definire una distribuzione $T = T_f$ di tipo funzione.
b) Descrivere la distribuzione $T^{(4)}$, derivata quarta di T in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Svolgimento.

a) La funzione è continua in $\mathbb{R}$; quindi è localmente sommabile. Questo è sufficiente per assicurare che f è adatta per definire una distribuzione.

b) f è C^∞ in $\mathbb{R} - \{0\}$; si può scrivere $f(x) = x^4 - x^3(1 - \operatorname{sgn} x)$ quindi le derivate sono, per $x \neq 0$,

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^4 - x^3(1 - \operatorname{sgn} x) \\
f'(x) &= 4x^3 - 3x^2(1 - \operatorname{sgn} x) \\
f''(x) &= 12x^2 - 6x(1 - \operatorname{sgn} x) \\
f'''(x) &= 24x - 6(1 - \operatorname{sgn} x) \\
f^{(4)}(x) &= 24
\end{aligned}$$

Le derivate prima e seconda di f esistono anche in 0 (con valore 0); non la derivata terza, essendo

$$\lim_{x \to 0^+} f'''(x) = 0; \qquad \lim_{x \to 0^-} f'''(x) = -12.$$

Dunque $f'''(x)$ è continua in $\mathbb{R} - \{0\}$, e ha una singolarità di prima specie in 0 con salto di ampiezza 12.

Perciò $(T_f)^{(4)} = T_{f^{(4)}} + 12\delta$, cioè per ogni funzione test $\varphi \in D(R)$,

$$\left\langle (T_f)^{(4)}, \varphi \right\rangle = 24 \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, dx + 12\varphi(0).$$

3) Enrico commissiona lavori di ristrutturazione di casa sua a un artigiano. Sull fattura dei lavori lo Stato riconosce un rimborso del 50% in 10 rate annuali di uguale importo, cioè per ogni 100€ fatturati Enrico riceverà 5€ all'anno, a partire da tra un anno e per 10 anni. L'artigiano (scorrettamente) propone a Enrico

di non rilasciargli fattura, praticandogli in tal caso uno sconto. Calcolare quale sconto percentuale rende preferibile (prescindendo da considerazioni etiche) il pagamento “in nero”, se il tasso di mercato è 2% (bisogna confrontare lo sconto immediato con il valore attuale delle rate di rimborso statale).

Svolgimento.

Ragioniamo su 100€ di spesa fatturata. Posto $v = \frac{1}{1+i} = \frac{1}{1{,}02}$, il valore attuale delle rate di rimborso fiscale è

$$V = \sum_{k=1}^{10} 5 \cdot v^k = 5 \cdot \frac{v\left(1-v^{10}\right)}{1-v} = 44{,}91 .$$

Il pagamento “in nero” conviene quindi se lo sconto offerto è superiore a 44,91€ su ogni 100€ da fatturare, cioè se lo sconto è superiore a 44,91%.

(commento: i valori adottati sono abbastanza realistici. La fatturazione e il conseguente beneficio fiscale, oltre a rispettare la legge, convengono perché difficilmente chi paga in nero ottiene uno sconto tanto consistente)

4) Sia $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$. Mostrare che *f* è lipschitziana in ogni intervallo limitato *I*, cioè esiste $L > 0$ tale che $\forall\, x_1, x_2 \in I$, $\left|f(x_1) - f(x_2)\right| \le L\left|x_1 - x_2\right|$ (applicare il Teorema del valor medio, verificando che sono soddisfatte le condizioni che ne autorizzano l’uso).

Mostrare poi che la proprietà vale in effetti su tutto $\mathbb{R}$.

Svolgimento. La funzione *f* è derivabile in $\mathbb{R}$; la derivabilità sussiste anche in 0 essendo

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0 .$$

La derivata di *f*, negli $x \neq 0$, è

$$f'(x) = 2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

In ogni intervallo limitato $[-M, M]$ f' è limitata, essendo

$$\left|f'(x)\right| \le \left|2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right| + \left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \le 2M + 1$$

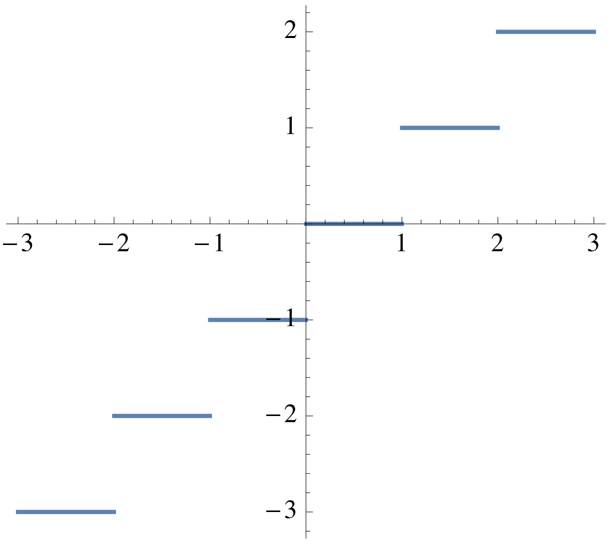
Allora, se $x, y \in [-M, M]$ si ha

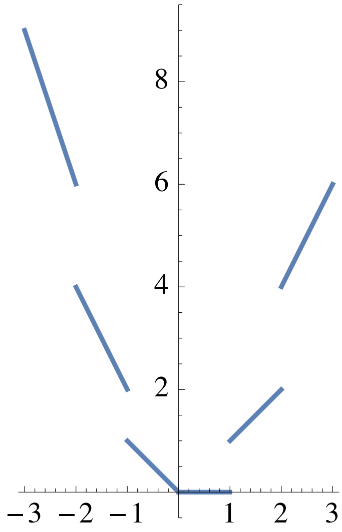
$$\left|f(x) - f(y)\right| = \left|f'(z)\right| \cdot \left|x - y\right| \le (2M+1) \cdot \left|x - y\right|$$

(z è un opportuno valore compreso tra *x* e *y*, la cui esistenza è assicurata da Teorema del valor medio).

In effetti la derivata di *f* è limitata in $\mathbb{R}$, perché $\lim_{x\to+\infty} 2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 2$, quindi esiste $M > 0$ tale che, se $|x| > M$ allora $\left|2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right| < 3$ e quindi $\left|f'(x)\right| < 4$; quindi per ogni $x \in \mathbb{R}$ è $\left|f'(x)\right| < \max\{4, 2M+1\}$, e il ragionamento svolto sopra è quindi valido per *x*, *y* qualunque.

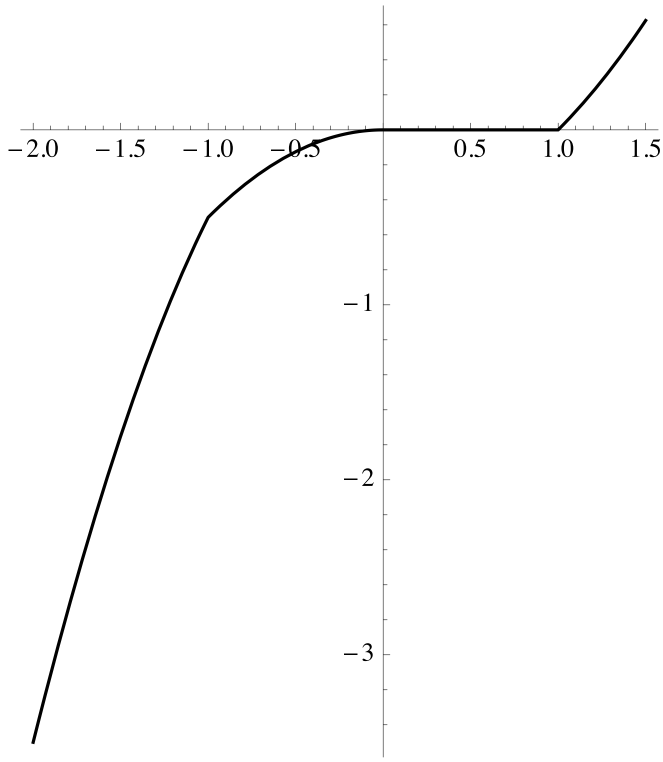
5) Sia, per $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z}\,;\, n \le x\}$. Poniamo, per $x \in \left[-2, \frac{3}{2}\right]$, $f(x) = \int_0^x t \cdot \lfloor t \rfloor\, dt$. Disegnare il grafico di *f* e descriverne le proprietà (continuità, derivabilità, monotonia)





Le figure mostrano i grafici di $y=\lfloor x\rfloor$ e $y=x\cdot\lfloor x\rfloor$, rispettivamente. La funzione integrale *f* definita come sopra è continua per note proprietà; per il Teorema fondamentale del Calcolo integrale *f* è derivabile in ogni punto in cui è continua la funzione integranda $x\mapsto x\cdot\lfloor x\rfloor$ cioè, nell'intervallo considerato $\left[-2,\frac{3}{2}\right]$, ovunque tranne in –1 e 1, e nei punti in cui *f* è derivabile, $f'(x)=x\cdot\lfloor x\rfloor$. Nei punti –1 e 1 il grafico di *f* ha due punti angolosi.

Siccome $g(x)=f'(x)=x\cdot\lfloor x\rfloor$ è sempre ≥ 0, *f* e crescente in tutto il dominio, ed è costante (con valore 0) tra 0 e 1, perché *g* è nulla in questo intervallo. Infine *f* è convessa [rispettivamente: concava] tra –2 e 0 [tra 1 e $\frac{3}{2}$].



Naturalmente è facile ricavare le espressioni esplicite di $f(x)$ nei diversi tratti del dominio osservato; ma ciò non è necessario per tracciare il grafico di *f*.

6) Con probabilità uguale a $\frac{1}{2}$ il famoso cantante Tommy Brown sarà l'ospite d'onore all'inaugurazione della discoteca Stellina (evento $\mathcal{E}_1$); in questo caso ci saranno moltissimi clienti; con probabilità $\frac{1}{4}$ Brown farà solo una breve apparizione verso sera ($\mathcal{E}_2$), e l'affluenza sarà minore; infine, con probabilità $\frac{1}{4}$ Tommy Brown non si presenterà affatto ($\mathcal{E}_3$), e la notizia provocherà scarsa affluenza di clienti. Il

proprietario deve decidere se fare provvista di spuntini e bevande “Scarsa”, “Media” o “Abbondante”; le previsioni di guadagno (in migliaia di Euro) nei diversi casi sono riassunte nella seguente tabella

	S	M	A	
$\mathcal{E}_1$	3	5	6	$\frac{1}{2}$
$\mathcal{E}_2$	3	5	4	$\frac{1}{4}$
$\mathcal{E}_3$	3	2	1	$\frac{1}{4}$

a) Stabilire quale scelta conviene al proprietario, per rendere massimo il guadagno atteso.

b) Il manager di Tommy, in cambio di una buona mancia, è disposto a informare il proprietario della discoteca sule intenzioni del cantante, prima che il gestore ordini le provviste. Calcolare qual è l’importo massimo della mancia che il gestore deve essere disposto a pagare per acquisire l’informazione, sempre secondo il criterio del massimo guadagno atteso.

Svolgimento.

a) Le speranze matematiche di guadagno sono indicate nella seguente tabella, che completa quella fornita nel testo:

	S	M	A	
$\mathcal{E}_1$	3	5	6	$\frac{1}{2}$
$\mathcal{E}_2$	3	5	4	$\frac{1}{4}$
$\mathcal{E}_3$	3	2	1	$\frac{1}{4}$
$(medie)$	3	$\frac{17}{4}$	$\frac{17}{4}$	

Perciò le decisioni M e A sono indifferenti, entrambe preferibili a S.

b) Disponendo della informazione perfetta, il gestore realizzerà in corrispondenza di ciascun evento $\mathcal{E}_i$ il guadagno massimo di quel caso, perché si approvvigionerà opportunamente. Il guadagno atteso in presenza di perfetta informazione è perciò uguale a $\frac{1}{2}\cdot 6+\frac{1}{4}\cdot 5+\frac{1}{4}\cdot 3=5$; perciò l’incremento di guadagno atteso è $5-\frac{17}{4}=\frac{3}{4}$, vale a dire 750€. È questo il valore della perfetta informazione, massimo importo che il gestore deve essere disposto a offrire al manager di Tommy in cambio dell’informazione